线性系统极点配置控制器设计与仿真

杨冶杰
(辽宁石油化工大学信息工程学院,辽宁 抚顺 113001)

摘要:线性系统的动态性能主要取决于系统极点的位置。极点配置问题就是把闭环极点组配置到所希望的位置上,等价于使综合系统的动态性能达到期望的要求。极点配置问题的算法有多种,特别是对于多输入系统,其计算较为复杂。提出了极点配置问题的算法和步骤,并就此问题给出了一个具有实用价值的 Matlab 程序。

关键词:线性定常系统;状态反馈;极点配置;Matlab 程序
中图分类号:TP311.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:0253-4320(2004)S2-0191-03

Design and simulation of pole assignment controller in linear system

YANG Ye-jie
(School of Information and Engineering, Liaoning University of Petroleum and Chemical Techology, Fushun 113001, China)

Abstract: The dynamic performance of linear system mainly lies on its pole position. Pole assignment means that assigns the closed loop system's poles to the expected position, it is equivalent to achieve the dynamic performance of the integrate system to expected request. This issue has manifold algorithms, especially for muti-input system, its calculation is rather comptex. An algorithm and step of pole assignment is put forward, and an example based on Matlab program is given.

Key words: linear time-invariant system; state feedback; pole assignment; Matlab program

线性系统的状态空间法是线性系统理论中最重要和影响最广泛的一个分支。状态空间法中,用以表征系统特征的数学模型是反映输入、输出变量和状态变量之间关系的一对向量方程,称为状态方程和输出方程,分别为式(1)和式(2)。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{2}$$

对于最小实现系统,$\boldsymbol{D}(t)=0$,则输出方程为:

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{3}$$

在系统分析和综合设计中,所涉及的计算主要为矩阵运算和矩阵变换,Matlab 软件为此提供了一个强有力的工具。状态变量反馈和含状态观测器的状态变量反馈系统的综合,在线性系统理论中占有重要地位。笔者针对线性系统理论中的极点配置问题,着重讨论实现线性系统极点配置问题的算法。

1 线性状态反馈系统的相关理论

1.1 状态变量反馈的概念

线性状态反馈系统的时间域综合,是研究改变系统运动规律的可能性和方法的问题。其目的是寻找一个控制量 $\boldsymbol{u}(t)$,使得在其作用下系统的运动行为满足所给出的期望性能指标。采用反馈是实现这一目的的基本手段之一。无论在抗扰动和抗参数变动方面,反馈系统的性能都优于非反馈系统。

对给定线性定常最小实现系统的状态空间描述:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \tag{5}$$

闭环系统的传递函数矩阵为:

$$\boldsymbol{W}_B(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{u}(t)$为对系统施加的控制,当 $\boldsymbol{u}(t)$依赖于系统的状态响应 $\boldsymbol{x}(t)$和一个输入向量 $\boldsymbol{v}(t)$时,则表示为:

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) \tag{7}$$

这种控制被称为状态反馈控制,$\boldsymbol{K}$ 为反馈增益矩阵。由此,可以得到状态反馈系统的状态空间方程:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{n\times1}(t)=(\boldsymbol{A}_{n\times n}-\boldsymbol{B}_{n\times r}\boldsymbol{K}_{r\times n})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)_{r\times1} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{y}_{r\times1}(t)=\boldsymbol{C}_{r\times n}\boldsymbol{x}(t) \tag{9}$$

状态变量反馈的引入,不改变系统的能控性[1]。闭环系统的传递函数矩阵为:

$$\boldsymbol{W}_B(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B} \tag{10}$$

$\boldsymbol{K}$ 的引入改变了系统矩阵,即改变了系统极点的位置。

1.2 状态反馈的极点配置问题

线性系统的动态性能,如系统稳定性、时间域分析中的超调量、过渡时间等指标,主要取决于系统的极点位置。极点配置的一般方法可以通过换算和经

作者简介:杨冶杰(1961-),大学,副教授,从事自动化及电子信息工作,0413-6650371,weekend_d@163.com。

验估计而加以确定。把闭环极点给配置到所希望的位置上，等价于使综合得到的线性系统的动态性能达到期望的要求。采用状态反馈对线性定常系统任意配置极点的条件是原系统完全能控。

设线性定常系统是完全能控的，其特征值为 μ_i，给定的闭环系统的 n 个所期望的极点是(μ_1^*，μ_2^*，$\cdots$，μ_n^*)则有：

$$\mu_i^* = \mu_i(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}) \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{11}$$

μ_i^* 表示原线性定常系统加入状态反馈后的特征值。因此，对于一个完全能控的线性系统的极点配置问题，实际上转化为求解状态反馈增益矩阵。

2 极点配置问题的算法

(1)考察系统的可控性条件。如果系统是状态完全可控的，则可按下列步骤继续。

(2)计算系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n \tag{12}$$

并确定出 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 的值。

(3)确定将系统状态方程变换为可控标准形的变换矩阵 $\boldsymbol{P}$。若给定的状态方程已是可控标准开状态方程，那么 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$。此时无须再写出系统的可控标准开状态方程。非奇异线性变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为：

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} * \boldsymbol{W} \tag{13}$$

式(13)中：

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \cdots \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 a_i 为特征多项式 $s|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$ 的系数。

(4)利用给定的期望闭环极点，可写出期望的特征多项式为

$$(s - \mu_1^*)(s - \mu_2^*)\cdots(s - \mu_n^*) = s^n + a_1^* s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}^* s + a_n^* \tag{14}$$

并确定出 $a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*$ 的值。

(5)此时的状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为

$$\boldsymbol{K} = [a_n^* - a_n \quad a_{n-1}^* - a_{n-1} \quad \cdots \quad a_2^* - a_2 \quad a_1^* - a_1]\boldsymbol{P}^{-1} \tag{15}$$

3 举例及仿真

考虑如下线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \tag{16}$$

其中：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

利用状态反馈控制 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{Kx}$，希望该系统的闭环极点为 $s = -2 \pm 4j$ 和 $s = -10$。试确定状态反馈增益矩阵 K，其算法如图1所示。

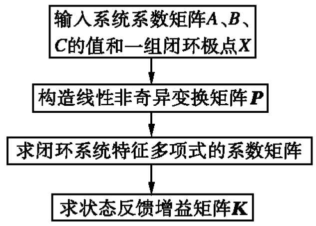

图1 算法流程图

用 Matlab 语言编程求 $\boldsymbol{K}$。

```
%极点配置
%利用变换矩阵求状态反馈增益
%输入矩阵 A 和 B
A=[0 1 0; 0 0 1; -1 -5 -6];
B=[0;0;1];
%定义可控矩阵 Q
Q=[B A*B A^2*B];
%检验 Q 矩阵的秩
rank(Q);
%键入 poly(A),得到特征多项式 | sI-A | 的系数。
JA=poly(A);
a1=JA(2);a2=JA(3);a3=JA(4);
%定义矩阵 W 和 P
W=[a2 a1 1;a1 1 0;1 0 0];
P=Q*W;
%定义 J,键入 poly(J),得到期望的特征多项式
J=[-2+j*4 0 0;0-2-j*4 0;0 0-10];
JJ=poly(J);
aa1=JJ(2);aa2=JJ(3);aa3=JJ(4);
%计算状态反馈增益矩阵 K
K=[aa3-a3 aa2-a2 aa1-a1]*(inv(P))
k1=K(1),k2=K(2),k3=K(3)
```

运算结果：

k1 = 199

k2 = 55

k3 = 8

系统仿真:

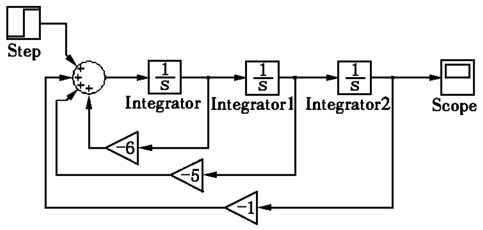

图 2　原系统图形组态

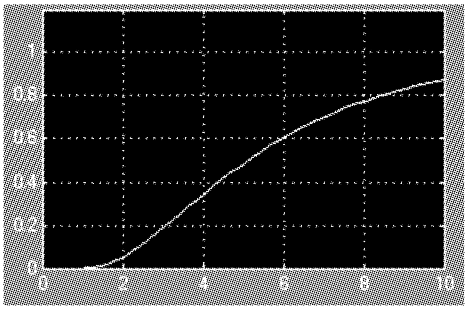

图 3　原系统仿真结果

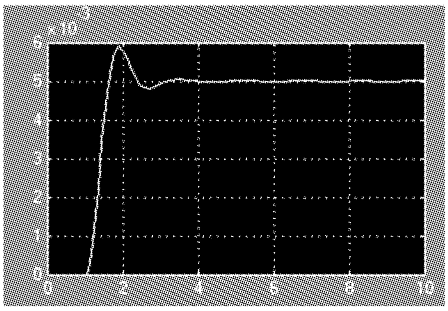

图 4　加入状态反馈后仿真结果

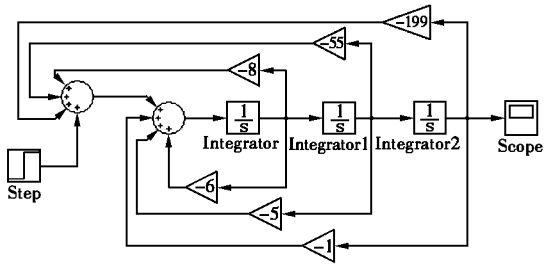

图 5　加入状态反馈后系统图形组态

从仿真图可以看出:原系统阶跃响应过渡过程时间太长,t_s 过大,加入状态反馈后,其性能指标得以改善。

4　结语

极点配置问题的算法有多种,且取得的值并不惟一。笔者所采用算法的计算过程是非常规范的,所求得的 $\boldsymbol{K}$ 中各反馈增益元的值比采用其他算法得出的结果要小,这是这一算法的特点。使用 Matlab 编写的程序方便地解决了线性状态变量反馈系统极点任意配置的问题,并且该程序稍作修改即可用于多输入-多输出系统的状态观测器的设计。

参考文献

[1] 刘豹.现代控制理论[M].第二版.北京:机械工业出版社,2002.168 - 206.
[2] 孙德宝.自动控制原理[M].北京:化学工业出版社,2002.293 - 380.
[3] 胡寿松.自动控制原理[M].第四版.北京:科学出版社,2002.558 - 625.
[4] 崔怡.MATLAB 5.3 实例详解[M].北京:航空工业出版社,2000.

■

中国石化在沪推出 98 号高品质清洁汽油和新型 0 号高品质城市车用清洁柴油

中国石化在上海市场上推出了 98 号高品质清洁汽油和新型 0 号高品质城市车用清洁柴油,受到用户的欢迎,这是中国石化目前在国内市场推出的最高等级的汽柴油产品。

98 号高品质清洁汽油与现行的燃油相比,其抗爆性能更好,硫含量更低,排出的尾气更清洁,适用于各类高档汽车,有利于城市环境保护。而城市车用清洁柴油与现行 0 号柴油相比,硫含量更低,仅仅是一般 0 号柴油的 1/4;润滑性能、十六烷值、着火性能等重要质量指标都有进一步的提高;其品质相当于欧Ⅱ标准。使用城市车用清洁柴油的车辆,其排出的尾气中,硫等有害物含量大为减少。城市车用清洁柴油是一种先进的环保型车用燃料。