

基于 Benders 分解的不确定条件下 过程优化研究

王 政^{1,2} 韩方煜² 华 贲¹

(1. 华南理工大学化学工程研究所, 广东 广州 510641;

2. 青岛科技大学计算机与化工研究所, 山东 青岛 266042)

摘要: 基于 Benders 分解的二阶段随机规划在不确定条件过程优化中占有重要的地位, 分析和比较了前人的工作, 并将蒙特卡罗积分策略与基于对偶理论的可行域限定条件相结合, 提出了新的求解策略, 不仅避免了求解一系列子问题进行可行域限定的情况以及计算负荷随不确定参数数目呈指数增加的不足, 而且使可行域限定条件更加合理, 算例证明了该算法的有效性。

关键词: 不确定参数; 二阶段随机优化; Benders 算法; 过程优化

中图分类号: TQ021.8; TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 0253-4320(2004)S2-0163-03

Process optimization under uncertainty based on Benders decomposition

WANG Zheng^{1,2}, HAN Fang-yu², HUA Ben¹

(1. Research Institute of Chemical Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China; 2. Research Center for Computer and Chemical Engineering, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266042, China)

Abstract: In study of process optimization under uncertainty, it is important to use two-stage stochastic linear programs based on Benders decomposition. An improved algorithm of the former work for process optimization under uncertainty is proposed combined Monte Carlo sampling with feasibility cuts based on dual theory. This is achieved by avoiding the solution of feasibility subproblems, the number of which is exponential in the number of uncertain parameters. The improved algorithm is more realistic, on the problems tested, than the former work.

Key words: uncertainty; two stage stochastic programming; Benders algorithm; process optimization

基于对过程系统中不确定参数描述的出发点不同, 不确定条件下过程优化的研究已形成基于随机处理与基于模糊数学处理的 2 个研究方向。基于随机处理的方法在数学上一般归结为随机期望值模型和随机机会约束模型, 进行随机规划模型研究的出发点有 2 个: 一是 Wait and See 方法; 二是 Here and Now 方法。前者是指当观察到随机参数的实现值以后再建立相应的规划模型, 此时各随机参数成为已知数, 对于每个样本, 均可有一个确定型的规划问题与之相对应, 形成的这种模型又叫分布问题。后者是在尚未观察到随机参数的任何实现值之前就建立规划模型, 并解出决策变量, 此时要对偏差进行补偿, 形成二阶段模型。

1 基于 Benders 分解的不确定条件过程优化的求解策略

1.1 二阶段随机规划优化模型

Kall 与 Wallace^[1] 将二阶段随机规划问题的标准

形式描述为:

$$z = \min_x \{c^T x + E_{\theta \in \Omega} [Q(x, \theta)] \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \quad (1)$$

其中,

$$Q(x, \theta) = \min_y \{f(\theta)^T y \mid Dy \geq h(\theta) - T(\theta)x, y \geq 0\} \quad (2)$$

式中 x 为设计变量, y 为操作变量, θ 为符合 $J(\theta)$ 概率分布的不确定参数; Ω 为不定变量 θ 的取值范围; $T(\theta)$ 和 $h(\theta)$ 分别为第二阶段关于 θ 的函数; $f(\theta)$ 为包含 θ 的变量 y 的系统矩阵; A 为第一阶段的约束矩阵; D 为第二阶段的相关矩阵; b 为第一阶段的约束值; c 为第一阶段的成本值。式(1)为第一阶段, 又称设计阶段, 式(2)为第二阶段, 又称操作阶段。设计者在第一阶段, 即不确定参数 θ 未出现之前选择设计变量 x , 等到 θ 出现确定值后, 决定控制变量 y 。

1.2 基于 Benders 分解的求解策略

如果不确定参数为离散分布, 则规划可化为确定型的大规模线性规划问题, 而大多数情况下, 不确定参数表述为连续概率分布, 此时采用的是以抽样

为基础的分解和近似策略,即用一系列抽样点的积分值来表达期望值,从而化为确定型线性规划问题,然后由广义 Benders 分解等求解策略来使问题得到解决。

文献[2~5]提出了可行域算法(feasible region algorithm),其特点是首先求解一系列子问题:

$$\begin{aligned} \max \{ & (\theta^U - \theta^L) \mid Dy \geq h(\theta^U) - T(\theta^U)x^k, \\ & Dy \geq h(\theta^L) - T(\theta^L)x^k \} \end{aligned} \quad (3)$$

其中, θ^U, θ^L 分别为不确定参数可取的最大值与最小值。使每一个抽样点限制在可行域内,由高斯积分公式确定期望值 $E_{\Omega}[Q(x^k, \theta^q)]$,再由 Benders 分解求解。其中 Benders 分解中主问题的优化限制条件系数由求解二阶段问题 $Q(x^k, \theta^q)$ 的对偶问题获得。

可行域算法存在以下几个问题:①求解一系列子问题加大了解决问题的计算负荷;②对于可行域为非凸的情况,仍有可能出现所选积分点不在可行域内的情况;③在算法中计算负荷随不确定参数数量的增加而呈指数增加,限制了算法对多维不确定参数的应用。

文献[6]提出用蒙特卡洛(monte carlo, MC)积分策略代替高斯积分策略,求不确定参数区域的积分值,由此确定期望值 $E_{\Omega}[Q(x^k, \theta^q)]$,即根据大数定律,当随机模拟样本 N 很大时,有:

$$E(Q) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Q(a_n) \quad (4)$$

其中, a_n 为抽样点。

文献[6]提出的 MC 积分求解算法进行了全部不定参数区域的积分点抽样,避免了求解一系列限定子问题,可以有效解决算法中计算负荷随不确定参数数量的增加而呈指数增加的问题,同时也提高了求解的速度,但对于不符合可行域抽样点的限定方面,选择了最为苛刻的情况作为限定条件,即用限定条件中最差的可能值作为限定条件值对 Benders 分解算法的主问题进行约束,因此该策略较为保守,而且不具普遍性。

2 改进的求解算法

针对文献[6]在可行域抽样点限定条件中的不足,笔者提出了改进的 MC 积分求解算法,其思路是进行全部不定参数区域的积分点抽样,避免文献[2-3]求解一系列限定子问题的情况,对于不符合可行域抽样点的限定方面,在 Benders 算法中的主问题加入可行域限定条件^[7]:

$$\pi_k [h(\theta^k) - T(\theta^k)x] \leq 0 \quad (5)$$

其中 π_k 为不符合可行域限定条件的抽样点求解二阶段问题的对偶方向。

改进的基于 Benders 分解不确定条件下过程优化求解算法描述如下:

Step 0: 选择初值 $x^0, k \leftarrow 0, UB = +\infty, LB = -\infty$ (其中 UB, LB 分别为收敛上下界值)。

Step k(1): 产生 N 个(一般大于 $30^{[4]}$)符合已知随机分布的伪随机数 a_n ,由此求解二阶段问题 $Q(x^k, \theta^q)$ 的对偶问题,如问题无界(即原问题不可行),求得对偶方向值 π_k 。在主问题的求解时加入可行性限定条件 $\pi_k [h(\theta^k) - T(\theta^k)x] \leq 0$ 。转至 k(5),否则进行 k(2)。

Step k(2): 求解在随机点 q 上解二阶段问题 $Q(x^k, \theta^q)$ 的对偶问题,得到期望值 $E_{\Omega}[Q(x^k, \theta^q)] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Q(a_n)$ 以及对偶解 $\pi_{k,q}$ 。

Step k(3): 更新上界 $UB^k = cx^k + E_{\Omega}[Q(x^k, \theta^q)]$,如果 $UB^k < UB, UB = UB^k, x^* = x^k$ 。

Step k(4): 增加 Benders 优化限定条件 $\mu \geq cx^k + \pi_{k,q} [h(\theta^k) - T(\theta^k)x]$ 。

Step k(5): 解以下主问题,求得优化下界

$$\begin{aligned} LB &= \min \mu \\ \text{s.t. } Ax &\leq b, x \geq 0 \\ \mu &\geq cx^k + \pi_{k,l} [h(\theta^k) - T(\theta^k)x] \quad l = 1, k \\ \pi_l [h(\theta^k) - T(\theta^k)x] &\leq 0 \quad l = 1, k \end{aligned}$$

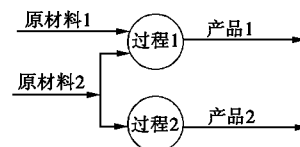
Step k(6): 如果 $UB - LB \leq \epsilon$ 则停止,否则 $k \leftarrow k + 1, x^{k+1} = x^k$ 。

3 算例

应用文献[4]中的算例进行了仿真实验与比较。

3.1 算例描述

本过程流程图见图 1。



1 - 迭代上界值; 2 - 迭代下界值

图 1 过程流程图

由 2 种不同的原料经过如图 1 描述的 2 个生产过程生产 2 种产品,生产分 1 和 2 两个生产时期。生产计划模型描述为:

$$\max \text{Profit} = 100S_{13} + 80S_{14} + 10I_{11}^1 + 20I_{13}^1 + 25I_{14}^1$$

$$-10P_{11} - 15P_{12} - 30R_{11} - 35R_{12} + 90S_{23} + 80S_{24} + 10I_{21}^f + 15I_{22}^f + 25I_{23}^f + 20I_{24}^f - 30R_{21} - 35R_{22} - 10I_{21}^s - I_{22}^s - 30I_{23}^s - 30I_{24}^s$$

s. t.

$$P_{s1} + I_{s1}^{in} - 0.4R_{s1} - I_{s1}^f = 0$$

$$P_{s2} + I_{s2}^{in} - 0.6R_{s1} - R_{s2} - I_{s2}^f = 0$$

$$I_{s3}^{in} + 0.5R_{s1} - I_{s3}^f - S_{s3} = 0$$

$$I_{s4}^{in} + 0.6R_{s2} - I_{s4}^f - S_{s4} = 0$$

$$20 \leq P_{11} \leq 100$$

$$30 \leq P_{12} \leq 200$$

$$20 \leq P_{21} \leq 100$$

$$10 \leq P_{22} \leq \theta_1$$

$$20 \leq S_{13} \leq 40$$

$$20 \leq S_{14} \leq 85$$

$$\theta_2 \leq S_{23} \leq 40$$

$$20 \leq S_{24} \leq 85$$

$$20 \leq R_{s1} \leq 100$$

$$I_{1i}^{in} = 0, I_{1i}^f = I_{2i}^{in}$$

$$30 \leq R_{s2} \leq 100$$

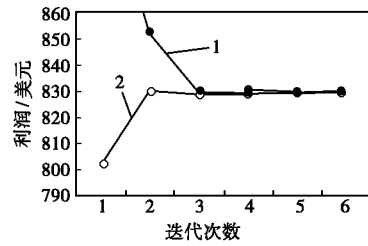
$$0 \leq I_{si}^f \leq 20$$

其中, $S = 1, 2$ 表示 2 个生产时期; $I = \{i | i = 1, 2, 3, 4\}$, 表示不同物料; $J = \{j | j = 1, 2\}$, 表示不同的产品; R_{sj} 是在 S 生产时期设备中产品 j 的处理量; S_{si} 为在 S 生产时期物料 i 的售出量; P_{si} 是在 S 生产时期物料 i 的购买量; I_{si}^{in}, I_{si}^f 分别为物料 i 在 S 生产时期开始与结束的储存量; θ_1, θ_2 为不确定参数, 分别服从正态分布 $N(50, 2.5)$ 和 $N(20, 2.5)$ 。

3.2 计算结果

新算法及文献[6]中的算法均在 Gams 环境下编程运行, 文献[6]与本文中的随机抽样数 N 均为 100。其中, $x = \{P_{1i}, R_{1i}, I_{1i}^{in}, I_{1i}^f, S_{1j}, I_{2i}^{in}\}, y = \{P_{2i}, R_{2i}, I_{2i}^f, S_{2j}\}$, 新算法运行的收敛情况见图 2, 运算得到的计算 CPU 时间为 0.24 s, 平均每次迭代时间为 0.06 s, 文献[6]的运算时间为 3.08 s。应该指出, 文献[6]的运行环境为 SUN SPARC 2 工作站, 本文的 CPU 时间运行的环境为 PC-P II 800。

文献[6]算法的求解结果为: $(R_{11}, R_{12}, S_{13}, S_{14}, P_{11}, P_{12}) = (80, 36.667, 40, 20, 40.213, 104.667)$, Profit = 830.1; 本文算法的求解结果为: $(R_{11}, R_{12}, S_{13}, S_{14}, P_{11}, P_{12}) = (80, 36.604, 40, 20, 32, 104.604)$, Profit = 829.7。



1—上限; 2—下限

图 2 新算法运行的收敛情况

4 结论

新提出的基于 Benders 分解的不确定条件下过程优化算法不仅避免了文献[2-3]求解一系列子问题来确保可行域内进行点的抽样问题, 以及计算负荷随不确定参数数目呈指数增加的不足, 同时对文献[6]中可行域限定条件过于保守、不具普遍性的情况进行了改进, 算例证明该算法是可行且有效的。

符号说明

- c —第一阶段成本值 ($c \in \mathbf{R}^{n_1}$);
- θ —符合 $J(\theta)$ 概率分布的不确定参数;
- x —第一阶段中的变量 ($x \in \mathbf{R}^{n_1}$);
- y —第二阶段中的变量 ($y \in \mathbf{R}^{n_2}$);
- Ω —不定变量 θ 的取值范围;
- A —第一阶段中的约束矩阵 ($A \in \mathbf{R}^{m_1 \times n_1}$);
- b —第一阶段中的约束值 ($b \in \mathbf{R}^{m_1}$);
- D —第二阶段中的相关矩阵 ($A \in \mathbf{R}^{m_2 \times n_2}$);
- π —子问题的对偶值;
- a_n —抽样点;
- θ^u, θ^l —分别为不确定参数可取的最大值与最小值;
- q —积分点;
- $f(\theta)$ —包含 θ 的变量 y 的系数矩阵;
- $T(\theta), h(\theta)$ —第二阶段关于 θ 的函数, $h(\theta) \in \mathbf{R}^{m_2}; T(\theta) \in \mathbf{R}^{m_2 \times n_1}$

参考文献

- [1] Kall P, Wallace S W. Stochastic Programming[M]. England: John Wiley and Sons, 1994.
- [2] Ierapetritou M G, Pistikopoulos E N. [J]. Industrial Engineering Chemistry Research, 1994, 33(8): 1930 - 1942.
- [3] Pistikopoulos E N, Ierapetritou M G. [J]. Computers and Chemical Engineering, 1995, 19(10): 1089 - 1110.
- [4] Acevedo J, Pistikopoulos E N. [J]. Computers and Chemical Engineering, 1998, 22(4-5): 647 - 671.
- [5] Ahmed S, Sahinidis N V, Pistikopoulos E N. [J]. Computers and Chemical Engineering, 2000, 23(11-12): 1589 - 1604.
- [6] Liu M L, Sahinidis N V. [J]. Industrial Engineering Chemistry Research, 1996, 35(11): 4154 - 4165.
- [7] Infanger G. Planning Under Uncertainty: Solving Large Scale Stochastic Linear Programs[M]. Danvers, MA: Boyd and Fraser, 1994. ■